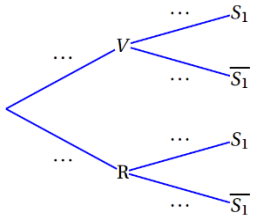
EXERCICE N°1 : 25' 4 points

Une urne contient trois dés équilibrés, deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6 et le troisième est rouge possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.
On prend un dé au hasard de l'urne et on le lance. (les résultats seront données sous forme de fractions).
On considère les évènements suivants : V « le dé tiré est vert ».
R « le dé tiré est rouge ».
S_1 « on obtient 6 au lancer du dé ».



1°) On tire au hasard un dé de l'urne et on effectue un lancer de celui-ci.
a) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.
b) Calculer la probabilité $p(S_1)$.
c) Sachant qu'on a obtenu le numéro 6 sur le dé lancé, calculer la probabilité qu'il soit rouge.

2°) On tire au hasard un dé de l'urne. Pour tout entier naturel n non nul, on lance n fois de suite ce dé.
On désigne par S_n l'évènement « on obtient 6 à chacun des n lancés ».
a) Exprimer $p(S_n)$ en fonction de n.
b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun de n lancers.
Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $p_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.
c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $p_n \geq 0{,}999$ pour tout $n_0 \geq n$.

EXERCICE N°2 : 25' 4 points

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.

- Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur.
- Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.
- Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan. On considère les deux évènements suivants :

A : « l'artisan est présent » ***R*** : « le client obtient le répondeur »

1°) a) Déterminer la probabilité $p(R)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $p(R/A)$ et $p(R/\overline{A})$.
b) En déduire que $p(A) = \dfrac{3}{10}$.

2°) Un client téléphone ; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

3°) Soit *n* un entier naturel non nul et différent de 1.
n clients téléphonent à l'artisan, l'un après l'autre de façon indépendante.
On considère l'évènement B_n « l'artisan est répond à au moins un client parmi ces *n* clients»
a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
b) Calculer la limite de la suite (p_n).

EXERCICE N°3 : 25' 4 points

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux de ces pièces sont normales : elles possèdent une face « FACE » et une face « PILE ». La troisième est truquée : elle possède deux faces « FACE ».
On extrait une pièce de l'urne au hasard, puis on effectue des lancers successifs et indépendants de cette pièce. On considère les événements suivants :

A : « la pièce extraite est normale » , $\overline{\mathbf{A}}$: « la pièce extraite est truquée »

P : « on obtient PILE au premier lancer » ,
$\mathbf{F_n}$: « on obtient FACE aux n premiers lancers ».

1) a) Calculer $p(P\cap A)$ et $p(P\cap \overline{\mathbf{A}})$
b) En déduire p(P).

2) Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+1\right)$.

3) a) Sachant qu'on a obtenu FACE n fois au cours des n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir extrait la pièce truqué ?
b) Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE N°4 : 25' 4 points

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :

A : " On obtient des boules des deux couleurs " ;

B : " On obtient au plus une blanche ".

1°) a) Calculer la probabilité de l'événement : " Toutes les boules tirées sont de même couleur ".

b) Calculer la probabilité de l'événement : " On obtient exactement une boule blanche ".

c) En déduire que les probabilités $p(A\cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A\cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1-\frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2°) Montrer que $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n+1$.

3°) Soit (u_n) la suite définie, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux, par $u_n = 2^{n-1}-(n-1)$.

Calculer u_2, u_3, u_4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4°) En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.